第 41 卷 第 6 期
2024 年 12 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 41 No. 6
Dec. 2024

文章编号:1000-4939(2024)06-1367-11

扬矿泵位置对深海管道谐响应动力学行为的影响

邓旭辉, 蒙俞辛

(湘潭大学土木工程与力学学院,411105 湘潭)

摘 要:深海扬矿系统的工作环境极其复杂,目前针对扬矿系统的结构设计和各项参数还有待进一步的研究。以 1 km 扬矿管道为例,研究扬矿泵在不同位置时对扬矿管道动力学行为的影响。为建立合理的动力学模型,采用弹性约束代替升沉补偿装置的作用;外激励主要考虑波流联合的水平激励、波浪纵向激励、扬矿泵正常工作时产生的扭矩激励;采用能量积分法建立管道的振动方程以及用有限元方法分析扬矿泵安装在管道的不同位置时的动力学响应。结果表明:随着扬矿泵安装位置沿着管道下降,系统的固有频率呈现出由小到大,再由大到小的变化规律,而管道的最大振幅呈现出由大到小、再由小到大的变化规律;单载荷激励作用下,管道的振幅和等效应力由小到大分别为扭矩激励、波浪纵向激励、波流联合水平激励,三者联合且同相位激励时,系统谐响应显著增大;随着扬矿泵安装位置沿着管道下降,管道的最大振幅和最大等效应力响应呈现出由大到小、再由小到大的变化规律。以上结果证明,在给定的合理安装位置范围内存在振幅和等效应力的极小值,即在力学上存在最优安装位置。在研究模型的基础上,以最小等效应力为判据确定了扬矿泵在管道上的次优安装位置。通过基于谐响应分析以等效应力为判据的扬矿泵安装位置的计算方法并证明存在力学上的最优安装位置,为扬矿系统的结构设计提供了重要的参考依据。

关键词:扬矿管道;扬矿泵位置;模态分析;谐响应分析

中图分类号:TD857 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2024.06.017

Effect of lifting pump position on harmonic response dynamic behavior of deep-sea pipeline

DENG Xuhui, MENG Yuxin

(College of Civil Engineering and Mechanics, Xiangtan University, 411105 Xiangtan, China)

Abstract: The working environment of lifting system in deep-sea mining is very complicated, so the structure design and parameters of the system still deserve further research. The effect of lifting pump at different positions on the dynamic behavior of 1 km lifting pipeline is studied. A reasonable dynamic model is established with elastic constraint that is used to replace heave compensation device. The external excitation mainly considers the horizontal excitation of wave-flow combination, the longitudinal excitation of wave and the torque excitation generated by the normal operation of the lifting pump. The vibration equation of

收稿日期:2022-04-18 修回日期:2022-06-17

基金项目:国家自然科学基金重点资助项目(No. 5143002);湖南省教育厅资助项目(No. 18K028)

通信作者:邓旭辉,副教授。E-mail:dengbh@xtu.edu.cn

引用格式:邓旭辉,蒙俞辛. 扬矿泵位置对深海管道谐响应动力学行为的影响[J]. 应用力学学报,2024,41(6):1367-1377.

DENG Xuhui, MENG Yuxin. Effect of lifting pump position on harmonic response dynamic behavior of deep-sea pipeline[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2024, 41(6):1367-1377.

the pipeline is established by energy integral method and the dynamic response of the lifting pump is analyzed by finite element method when the lifting pump is installed at different positions of the pipeline. The results are as follows: The natural frequency of the system changes from small to large and then from large to small, while the maximum amplitude of the pipeline changes from large to small and then from small to large. Under single load excitation, the amplitude and equivalent stress of the pipeline are increased from small to large respectively: torque excitation, wave longitudinal excitation and wave-flow combined horizontal excitation. When the three are combined with the same phase excitation, the harmonic response of the system increases significantly. As the installation position of the lifting pump drops along the pipeline, the maximum amplitude and maximum equivalent stress response of the pipeline show a change rule from large to small and then from small to large. The above results prove that there exists a minimum of amplitude and equivalent stress within the range of a given reasonable installation position, that is, there exists a mechanically optimal installation position for the lifting pump. On the basis of the model, the minimum equivalent stress is taken as the criterion to determine the suboptimal installation position of the lifting pump on the pipeline. The calculation method of installation position of the lifting pump based on harmonic response analysis that takes equivalent stress as criterion is given in this thesis, and the existence of mechanically optimal installation position is proved, which provides an important reference for the structural design of the lifting system.

Key words: lifting pipeline; lifting pump position; modal analysis; harmonic response analysis

人类勘探到大量钴结壳、锰结核和多金属硫化物等矿产资源主要蕴藏在海平面 800 ~ 6 000 m 以下的深海底部[1]。为获得这些深海矿产资源，当前主流的深海采矿方案是海底集矿系统、悬挂在海水中的扬矿系统和海面采矿船相结合的方式[2-4]。由于扬矿管道跨度很长，长度从 800 ~ 6 000 m 不等，且受到多种复杂载荷的共同作用，如管道自身重力、海流力、波浪力、扬矿泵和中间舱的重力，扬矿泵产生的扭矩作用力等，因此扬矿管道是深海扬矿系统中最复杂的部分[5]。对扬矿管道的动力学特性研究有利于结构的设计与安全保障。

对扬矿管道动力学行为的研究可以采用理论、试验和数值模拟相结合的方式。文献[6]建立深海立管耦合振动方程并用 Hermit 插值函数法进行离散求解。文献[7]通过 Hamilton 能量原理建立振动微分方程，研究存在沿着管道轴向激励下的振动响应，并用 Galerkin 法求解并验证其理论研究分析和数值模拟相结合的正确性。文献[8]将理论和试验研究相结合，将薄壁圆管简化为 Timoshenko 梁，通过试验监测其管道的振动特性。文献[9]研究了管道顶端不同张力下管道的固有频率，得到不同张力下管道振动特性。文献[10]研究了内部场域为均匀流的条件下，长圆柱体在涡激振动下的非线性谐响应动力学分析。文献[11-12]采用数值模拟和试验研究相结合的方法将柔性管道的数值模拟计算和物理模型试验进行了对比，指出物理模型试验对于理解管道复杂动力响应的必要性。文献[13-16]采用有限元软件研究外部流场作用对管道流固耦合效应的影响，考虑管顶约束和外部波浪冲击速度等因素，对不同工况下扬矿管道的应力、应变、水平偏移量等动力学行为进行了研究。

国内外通过研究发现扬矿泵正常工作情况下产生的扭矩对管道的振动有一定的影响[17-18]。在扬矿系统设计中，通常主要考虑的因素是采矿深度和单位时间采矿量，这两个量直接决定了管道长度、管道直径、泵功率、扬程和转速等基本参数，从矿物输送的稳定性和安全性角度出发，还需要确定泵的安装位置和良好的泵工作特性等，众多变量组合在一起使设计的复杂性和难度大大增加。而工程上的做法是通过小比例的模拟试验和子系统试验来确定合适的参数范围，通过长期综合实践，现已经验性地确定了扬矿泵安装在扬矿管道的中上部较为合适(包括了前面所考虑的所有因素)，但没有确定性的计算公式可供参考。为解决这个问题，从力学角度考虑管道的结构强度和长期服役的要求，以管道最小等效应力为判据，在扬矿泵经验安装位置范围内寻找次优安装位置。本研究采用能量积分方法建立扬矿管道的纵、横、扭振动方程；通过建立合理的动力学模

型,选择特定长度的管道并在管道上在经验安装范围内确定扬矿泵 6 个不同安装位置,采用有限元法分别计算扬矿系统的湿模态和谐响应,以等效应力为判据,确定管道扬矿泵的次优安装位置,并以此为基础建立计算公式,为结构设计及可靠性分析提供参考依据。

1　扬矿管道的动力学模型

1.1　扬矿管道振动方程

扬矿系统力学模型如图 1 所示,m_1 为扬矿泵质量,m_2 为中间舱质量,f_x 为波流联合的水平激励,f_z 为纵向波浪力,T 为扬矿泵正常工作时产生的扭矩,L 为扬矿管道长度。

用有限元的思想将整个将扬矿管道离散成有限个单元,先求出各个单元作纵弯扭振动的相关单元质量、刚度特征参量,进而得运用矩阵叠加得到整个管道的质量矩阵和刚度矩阵,进而建立整体扬矿管道的纵、弯、扭动力学方程。

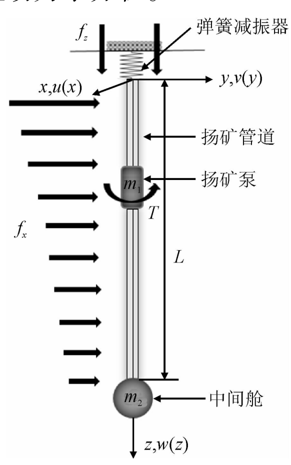


图 1　扬矿系统力学模型

Fig. 1　Mechanical model of lifting system

将扬矿离散为非线性梁单元[19],在三维空间中任取一小节梁单元,设其两端的节点为 i、j,如图 2 所示。

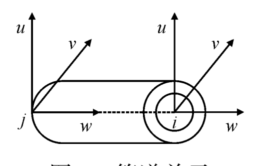


图 2　管道单元

Fig. 2　Piping unit

设管道单元耦合振动的变形函数为

$$N_u(z,t) = a_1(t) + a_2(t)z + a_3(t)z^2 + a_4(t)z^3 \tag{1}$$

$$N_v(z,t) = a_5(t) + a_6(t)z + a_7(t)z^2 + a_8(t)z^3 \tag{2}$$

$$N_w(z,t) = a_9(t) + a_{10}(t)z \tag{3}$$

$$N_\varphi(z,t) = a_{11}(t) + a_{12}(t)z \tag{4}$$

式中,待定系数 a_{ij} 由变形初始条件求得。如当 $z = 0$ 时,求出 $N_u(0,t) = u_i(t)$,$N_v(0,t) = v_i(t)$,$N_w(0,t) = w_i(t)$,$N_{\varphi z}(0,t) = \varphi_{zi}(t)$,$N_{\varphi x}(0,t) = \varphi_{xi}(t)$,$N_{\varphi y}(0,t) = \varphi_{yi}(t)$;同理,当 $z = L$ 时,求出 $u_j(t)$、$v_j(t)$、$w_j(t)$、$\varphi_{zj}(t)$、$\varphi_{xj}(t)$、$\varphi_{yj}(t)$。求得 a_{ij} 后将上述形函数写为如下矩阵形式

$$\boldsymbol{N}_u = [N_1, N_2, N_3, N_4][u_i, \varphi_{xi}, u_j, \varphi_{xj}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{N}_U \boldsymbol{R}_U \tag{5}$$

$$\boldsymbol{N}_v = [N_5, N_6, N_7, N_8][v_i, \varphi_{yi}, v_j, \varphi_{yj}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{N}_V \boldsymbol{R}_V \tag{6}$$

$$\boldsymbol{N}_w = [N_9, N_{10}][w_i, w_j]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{N}_W \boldsymbol{R}_W \tag{7}$$

$$\boldsymbol{N}_\varphi = [N_{11}, N_{12}][\varphi_{zi}, \varphi_{zj}]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{N}_\varphi \boldsymbol{R}_\varphi \tag{8}$$

整理得到扬矿管道单元的位移矩阵和弹性矩阵为

$$\boldsymbol{R} = [u_i, \varphi_{xi}, v_i, \varphi_{yi}, w_i, \varphi_{zi}, u_j, \varphi_{xj}, v_j, \varphi_{yj}, w_j, \varphi_{zj}]^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{N} = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

式中,u、v、w、φ_x、φ_y、φ_z 分别为扬矿管道单元沿着坐标轴的线位移和扭转角,其中 φ_x、φ_y 为弯曲振动引起的扭转位移。

根据变形函数求得质心速度为

$$V = \frac{\partial \boldsymbol{N}_u}{\partial t}\boldsymbol{x}' + \frac{\partial \boldsymbol{N}_v}{\partial t}\boldsymbol{y}' + \frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial t}\boldsymbol{z}' \tag{11}$$

得到管道单元动能为

$$\mathrm{d}\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L \rho_i A \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_u}{\partial t}\boldsymbol{x} + \frac{\partial \boldsymbol{N}_v}{\partial t}\boldsymbol{y} + \frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial t}\boldsymbol{z}\right)^2 \mathrm{d}z + \int_0^L \rho_i \boldsymbol{I} \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_\varphi}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}z \tag{12}$$

式中:$(\partial \boldsymbol{N}_u/\partial t)^2 = \boldsymbol{R}_U^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{N}}_U^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{N}}_U \boldsymbol{R}_U$;$(\partial \boldsymbol{N}_v/\partial t)^2 = \boldsymbol{R}_V^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{N}}_V^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{N}}_V \boldsymbol{R}_V$;$(\partial \boldsymbol{N}_\varphi/\partial t)^2 = \boldsymbol{R}_\varphi^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{N}}_\varphi^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{N}}_\varphi \boldsymbol{R}_\varphi$;$(\partial \boldsymbol{N}_w/\partial t)^2 = \boldsymbol{R}_W^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{N}}_W^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{N}}_W \boldsymbol{R}_W$。于是式(12)变为

$$\mathrm{d}\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{m}_{\mathrm{e}} \dot{\boldsymbol{R}}_V \tag{13}$$

求得管道单元质量矩阵为

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho_i A(\Delta_U + \Delta_V + \Delta_W)\mathrm{d}z + \int_0^L \rho_i I\Delta_\varphi \mathrm{d}z \tag{14}$$

式中：$\Delta_U = \dot{\boldsymbol{N}}_U^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{N}}_U$；$\Delta_V = \dot{\boldsymbol{N}}_V^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{N}}_V$；$\Delta_W = \dot{\boldsymbol{N}}_W^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{N}}_W$；$\Delta_\varphi = \dot{\boldsymbol{N}}_\varphi^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{N}}_\varphi$。

当管道发生横向弯曲振动和纵向弯曲振动后，管道单元由直线段形状变为弧线段形状，变形后的弧长为 $\mathrm{d}s$，由横向弯曲影响而产生的单元非线性应变为 $\varepsilon_1 = (\mathrm{d}s - \mathrm{d}z)/\mathrm{d}z$，产生的管道单元线性应变为 ε_2，产生的总应变为 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$。

矿浆引起的摩擦力 $f_{\mathrm{k}} = \pi\lambda\rho_{\mathrm{k}}V_{\mathrm{k}}D_{\mathrm{k}}/8$ 作用在管道内壁上的摩擦力为

$$f_{\mathrm{k}}' = \left(f_{\mathrm{k}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_u}{\partial z}\cos\varphi\right)\boldsymbol{x} + \left(f_{\mathrm{k}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_v}{\partial z}\sin\varphi\right)\boldsymbol{y} + \left(f_{\mathrm{k}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial z}\right)\boldsymbol{z} \tag{15}$$

式中：λ 为黏性系数；ρ_{k} 为矿浆密度；V_{k} 为矿浆速度；D_{k} 为管道内直径。

外部流场水质点在水平方向上作用在管道外壁上的液动力为

$$f_x' = \left(f_{\mathrm{DM}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_u}{\partial z}\cos\varphi\right)\boldsymbol{x} + \left(f_{\mathrm{DM}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_v}{\partial z}\sin\varphi\right)\boldsymbol{y} + \left(f_{\mathrm{DM}}\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial z}\right)\boldsymbol{z} \tag{16}$$

式中，$f_{\mathrm{DM}} = f_{\mathrm{D}} + f_{\mathrm{M}}$。

外部流体在纵向方向上作用在管道外壁的液动力为

$$f_z' = \left(f_z\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial z}\cos\varphi\right)\boldsymbol{x} + \left(f_z\frac{\partial \boldsymbol{N}_u}{\partial z}\sin\varphi\right)\boldsymbol{y} + \left(f_z\frac{\partial \boldsymbol{N}_v}{\partial z}\right)\boldsymbol{z} \tag{17}$$

记 $f_{\mathrm{all}} = f_{\mathrm{k}}' + f_x' + f_z'$，可得到管道单元变形能为

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{2}\int_V(\varepsilon^2 + \gamma^2)\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_0^L T\frac{\partial^2 N_{\varphi_z}}{\partial z^2}\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_0^L f_{\mathrm{all}}\Delta^2\mathrm{d}z \tag{18}$$

式中

$$\varepsilon^2 = \left[\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial z} - \boldsymbol{x}\frac{\partial^2 \boldsymbol{N}_u}{\partial z^2} - \boldsymbol{y}\frac{\partial^2 \boldsymbol{N}_v}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_v}{\partial z}\right)^2\right]^2,$$

忽略高阶小量；$\gamma^2 = \rho_i^2(\partial\varphi_z/\partial z)^2$，$\Delta^2 = \frac{\partial^2 \boldsymbol{N}_u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{N}_v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{N}_w}{\partial z^2}$。

同样将形变函数求偏导后代入式(18)有

$$\mathrm{d}\Gamma = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{R} \tag{19}$$

对式(19)求积分可得到管道单元的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}$。

有限元中阻尼矩阵表示为 $\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{M} + \gamma\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{C}$ 为 Rayleigh 阻尼，α、γ 为 Rayleigh 阻尼系数。根据单元质量刚度矩阵求得管道的整体质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 后，可以建立管道振动的振动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{U} + \boldsymbol{C}\dot{U} + \boldsymbol{K}U = \boldsymbol{F} \tag{20}$$

若上式右边外载荷矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为0，将管道的各计算参数代入就可以求得管道发生纵、横、扭振动的湿模态。

1.2 扬矿管外部液动力及扭矩分析

由于扬矿管道外径与海浪波长相比尺寸较小，因此适用 Morison 方程计算液动力。由于流体内部具有内摩擦，当液体流过柱状物体表面时会产生一定的黏性，并且会在流过柱状体后尾流中产生漩涡从而引起拖曳力。柱状物的存在使得柱体所占空间的水体由原本处于运动的状态变为静止不动的状态，因而产生一个惯性力，该惯性力大小等于该部分水体质量与水流速度求积。在波流联合作用下，将海流速度加到波浪水平速度分量中叠加计算[19]。

速度力和惯性力计算公式[19]分别为

$$f_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{w}}C_{\mathrm{D}}Dv_{\mathrm{D}} \tag{21}$$

$$f_{\mathrm{M}} = \frac{\pi D^2}{4}\rho C_{\mathrm{M}}\dot{v}_{\mathrm{D}} \tag{22}$$

其中 $v_{\mathrm{D}} = v_{\mathrm{b}} + v_{\mathrm{c}}$，$v_{\mathrm{b}}$、$v_{\mathrm{c}}$ 分别由下式求得

$$v_{\mathrm{b}} = \frac{H}{2}\omega \mathrm{e}^{4\pi^2 z/T^2 g}\cos(\omega t + \beta) \tag{23}$$

$$v_{\mathrm{c}} = 0.15 + 0.622\left(\frac{1\,000 + z}{1\,000}\right)^{12} \tag{24}$$

式中：f_{D} 为管道单位长度上所承受的波浪力；ρ_{w} 为海水密度；C_{D} 为速度力系数；v_{D} 为波流联合水平速度；v_{b} 为波浪水质点水平速度；D 为管道外径；ω 为波浪运动频率；H 为波高；f_{M} 为管道单位长度上所承受的波浪力；C_{M} 为惯性力系数；v_{c} 为海流水平速度，是水深 z 的函数，其值随着 z 的绝对值的增加而减少；z 代表水深，设定海洋表面为0，往下为正值。

采矿船在纵向波浪力 f_z 下作升沉运动，假设扬矿管随船在纵向波浪力 f_z 下作升沉运动，纵向流体力为[20]

$$f_z = \frac{\pi D^2}{4}\rho_{\mathrm{w}}\dot{v}_z^2 + \frac{4}{3\pi}C_{\mathrm{t}}\rho_{\mathrm{w}}DA_z v_{\mathrm{r}}L \tag{25}$$

式中：C_{t} 为阻力系数，取 $C_{\mathrm{t}} = 0.02$；v_{r} 为纵向相对流动速度；$\dot{v}_z$ 为水质点在垂直方向的加速度。

由于扬矿泵在工作过程中泵的转速并不是一直

恒定的,而是有一定的波动,因此扭矩同样是波动的[21],本研究假设泵的波动规律为

$$T = \frac{9\,550P}{n} + A_T\sin(\omega_F t) \tag{26}$$

式中:T 为扭矩;P 为功率;n 为转速 θ。根据文献[22]多个载荷的节点载荷 F 可以表示为

$$F = (f_D + f_M + f_z + A_T)\sin(\omega_F t) + 9\,550P/n \tag{27}$$

2　有限元建模及模态分析

2.1　扬矿泵安装位置次优解模型设计

为寻找次优扬矿泵安装位置,本研究在 1 000 m 的管道上选 6 个合理安装位置。定义 ζ_i 为扬矿泵管道上的第 i 个安装位置,$i = 1, 2, \cdots, 6$。根据扬矿泵安装的经验,扬矿泵在管道上的安装位置取以下 6 种情况:$\zeta_1 = 250$ m、$\zeta_2 = 300$ m、$\zeta_3 = 350$ m、$\zeta_4 = 400$ m、$\zeta_5 = 450$ m、$\zeta_6 = 500$ m。

根据扬矿系统的力学模型分别考虑扬矿泵的不同安装位置建立有限元模型,分别计算扬矿系统的湿模态,然后进行单载荷激励和耦合激励的谐响应分析,获得每个系统的最大幅频响应和最大等效应力;针对不同扬矿泵安装位置所对应的 6 个最大等效应力中选取最小值所对应的安装位置作为扬矿系统的次优安装位置。

2.2 扬矿管道的有限元建模

以计算总长为 1 000 m 的扬矿管道建立几何模型如图 3 所示,背景色区域表示包裹扬矿系统的流体域。扬矿管道与采矿船之间采用球铰弹性约束连接较为合适,弹性约束通过在扬矿管顶端设计弹簧减振器施加[23]。扬矿系统几何和物理参数见表 1 和表 2。

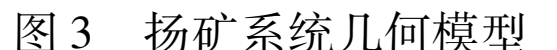


图 3　扬矿系统几何模型

Fig. 3　Geometric model of lifting system

表 1　扬矿系统的计算参数

Tab. 1　Calculation parameters of lifting system

参数	数值
输送系统总长 L/m	1 000
管道内径 D_1 /mm	420
管道外径 D_2 /mm	500
管道密度 ρ_i /(kg · m^{-3})	7 850
弹性模量 E/GPa	210
剪切模量 G/GPa	84
扬矿泵质量/t	6.8
泵总长/m	6.34
泵最大外径/m	0.93
泵额定转速/(r · min^{-1})	1 450
泵功率/kW	200
中间舱质量/t	30
弹簧减振器的刚度/(N · m^{-1})	9×10^6

表 2　各国附加质量系数、惯性力规范系数及六级海浪波浪特性[19]

Tab. 2　Additional mass coefficients, inertial force norm coefficients and wave characteristics of sixth-grade ocean waves in various countries[19]

各国规范	C_D	C_M	海况	平均波高/m	有义波高/m	周期/s
中国海港水文	1.2	2.0	六级	4.9	6	8
美国 API	0.6 ~ 1.0	1.5 ~ 2.0	六级	4.9	6	8
挪威 DNV	0.5 ~ 1.2	2.0	六级	4.9	6	8

2.3　扬矿管道的湿模态分析

取内流流速为 5 m/s,内流压强为 2 MPa[24]。在六级海况以及假设外部水质点运动速度不变,取 ζ_1 位置的前 6 阶固有频率,并将仿真结果与文献[23]对比,证明上述计算方法的正确性,见表 3。

计算结果表明,理论计算和仿真得到的固有频率差值不超过 3.5%,理论值与仿真值有差值是由于局部结构具有一定形状和体积导致了质量空间分布有一定差异,对扬矿系统固有频率产生一定影响,而计算时只计扬矿泵和中间舱质量,因而产生一定的模型误差。文献[23]建立了连接中间仓的扬矿系统计算模型,基于三维势流理论,采用分离变量法建立扬矿管道流固耦合振动方程,并通过 MATLAB 软件对方程求解得到固有频率数值解。仿真固有频率与文献[23]计算的固有频率误差小于 8.2%,整体误差高于理论计算值与仿真值之间的误差,可能是文献[23]在计算时忽略扬矿泵的质量所引起。

表 3 扬矿管道固有频率理论解与仿真解

Tab. 3 The theoretical solution and simulation solution of the natural frequency of the lifting pipeline

阶数	理论值/Hz	文献[23]值/Hz	仿真值/Hz	与理论误差/%	与文献误差/%
1	0.129 01	0.136 53	0.126 74	1.77	7.1
2	0.129 09	0.136 53	0.126 74	1.77	7.1
3	0.208 75	0.209 73	0.202 24	3.12	3.5
4	0.208 75	0.209 73	0.202 24	3.12	3.5
5	0.280 81	0.296 18	0.272 08	3.11	8.1
6	0.280 81	0.296 41	0.272 08	3.11	8.2

由于存在几何对称性,重根模态对应的振型形态相似仅方向不同,因此取扬矿泵处于不同位置时(ζ_1 ~ ζ_6)的扬矿管道第 1、3、5、7、9 阶振型进行分析,各阶固有频率见表 4,振型如图 4 ~8 所示。

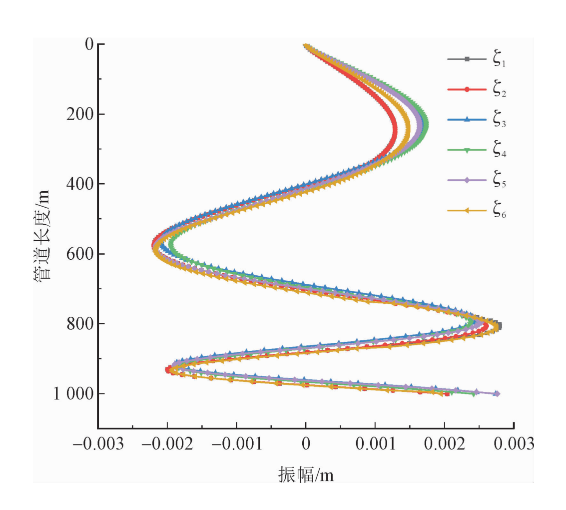
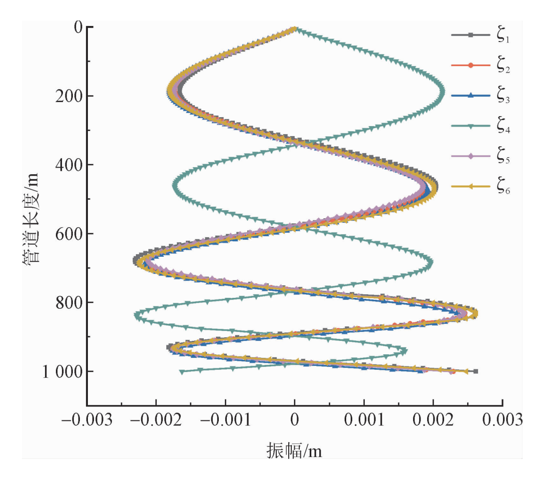


图 4 不同安装位置下管道的 1 阶振型

Fig. 4 The first-order vibration shape of the pipeline under different installation positions



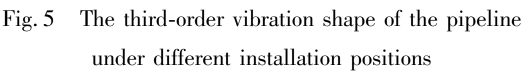


图 5 不同安装位置下管道的 3 阶振型

Fig. 5 The third-order vibration shape of the pipeline under different installation positions

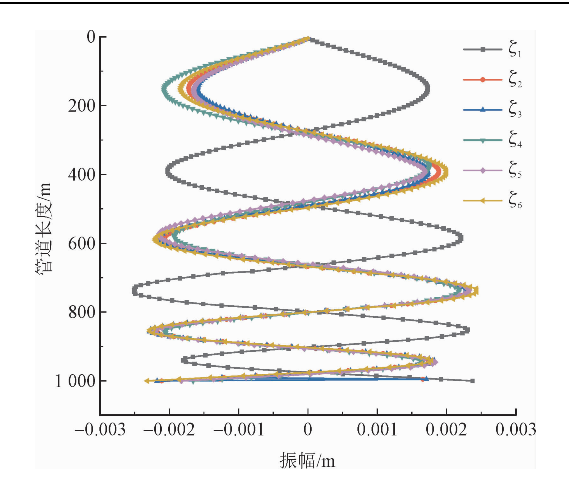


图 6 不同安装位置下管道的 5 阶振型

Fig. 6 The fifth-order vibration shape of the pipeline under different installation positions

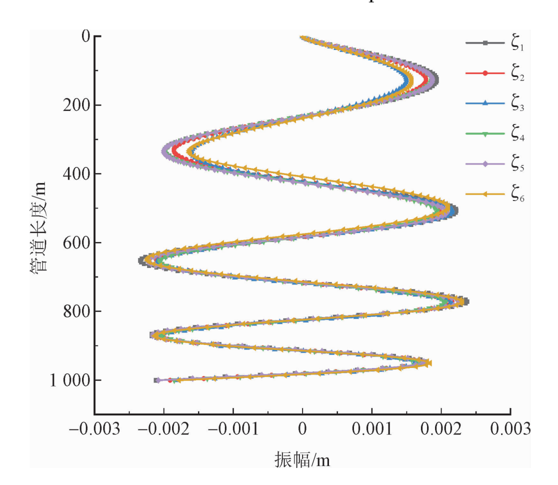


图 7 不同安装位置下管道的 7 阶振型

Fig. 7 Seventh-order vibration shape of the pipeline under different installation positions

由图 4 ~8 和表 4 数据可知,管道以弯振为主,随着振动阶数的增加,管道固有频率增加,管道反弯点数量增加,反弯点最大幅值减小。对于长径比极大且顶端刚度较大的弹性约束梁而言,横向振动是其主要振动模式,以上现象与理论是一致的。

表 4　管道各阶固有频率和振型特点

Tab. 4　Characteristics of natural frequencies and mode shapes of each order of the pipeline

阶数	泵位置	固有频率/Hz	振型特征
1	ζ_1	0.126 74	有 4 个反弯点,最大反弯点幅值 2.74 mm
	ζ_2	0.124 78	有 4 个反弯点,最大反弯点幅值 2.60 mm
	ζ_3	0.133 83	有 4 个反弯点,最大反弯点幅值 2.42 mm
	ζ_4	0.134 80	有 4 个反弯点,最大反弯点幅值 2.36 mm
	ζ_5	0.131 74	有 4 个反弯点,最大反弯点幅值 2.55 mm
	ζ_6	0.123 44	有 4 个反弯点,最大反弯点幅值 2.76 mm
3	ζ_1	0.202 24	有 5 个反弯点,最大反弯点幅值 2.61 mm
	ζ_2	0.215 59	有 5 个反弯点,最大反弯点幅值 2.47 mm
	ζ_3	0.226 17	有 5 个反弯点,最大反弯点幅值 2.30 mm
	ζ_4	0.232 24	有 5 个反弯点,最大反弯点幅值 2.27 mm
	ζ_5	0.223 82	有 5 个反弯点,最大反弯点幅值 2.46 mm
	ζ_6	0.205 90	有 5 个反弯点,最大反弯点幅值 2.60 mm
5	ζ_1	0.272 08	有 6 个反弯点,最大反弯点幅值 2.50 mm
	ζ_2	0.285 96	有 6 个反弯点,最大反弯点幅值 2.32 mm
	ζ_3	0.292 08	有 6 个反弯点,最大反弯点幅值 2.28 mm
	ζ_4	0.306 52	有 6 个反弯点,最大反弯点幅值 2.17 mm
	ζ_5	0.288 04	有 6 个反弯点,最大反弯点幅值 2.30 mm
	ζ_6	0.275 31	有 6 个反弯点,最大反弯点幅值 2.43 mm
7	ζ_1	0.313 69	有 7 个反弯点,最大反弯点幅值 2.38 mm
	ζ_2	0.322 39	有 7 个反弯点,最大反弯点幅值 2.21 mm
	ζ_3	0.347 75	有 7 个反弯点,最大反弯点幅值 2.14 mm
	ζ_4	0.353 87	有 7 个反弯点,最大反弯点幅值 2.05 mm
	ζ_5	0.341 75	有 7 个反弯点,最大反弯点幅值 2.21 mm
	ζ_6	0.315 95	有 7 个反弯点,最大反弯点幅值 2.32 mm
9	ζ_1	0.334 99	有 8 个反弯点,最大反弯点幅值 2.19 mm
	ζ_2	0.421 03	有 8 个反弯点,最大反弯点幅值 2.14 mm
	ζ_3	0.432 92	有 8 个反弯点,最大反弯点幅值 2.05 mm
	ζ_4	0.438 22	有 8 个反弯点,最大反弯点幅值 1.91 mm
	ζ_5	0.426 87	有 8 个反弯点,最大反弯点幅值 2.19 mm
	ζ_6	0.356 73	有 8 个反弯点,最大反弯点幅值 2.22 mm

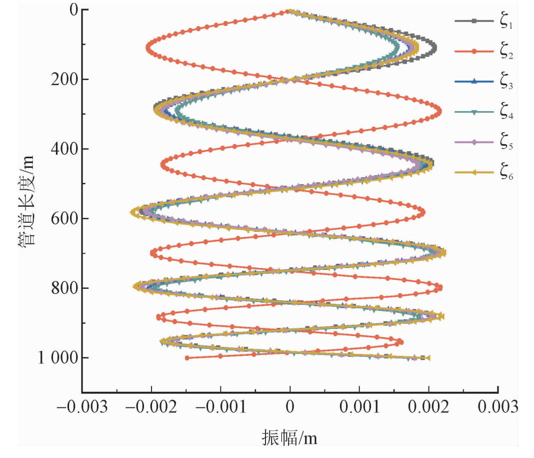


图 8　不同安装位置下管道的 9 阶振型

Fig. 8　The ninth-order vibration shape of the pipeline under different installation positions

扬矿泵处于不同位置时,随扬矿泵从 ζ_1 位置到 ζ_4 位置、ζ_4 位置到 ζ_6 位置,管道的各阶振动的固有频率均呈现由小到大、再由大到小的规律,而最大反弯点幅值呈现由大到小、再由小到大的规律。各阶振动的固有频率和最大振幅的转折点均发生在 ζ_4 位置。以第 5 阶振动为例,扬矿泵安装在 ζ_4 位置与其他位置相比,固有频率最大高出 11.2%,而最大反弯点振幅低于 14.7%。

扬矿泵安装位置的改变,本质上改变了管道质量(管内附加水质量和管外附加水质量沿管道不变)的空间分布,导致管道固有频率和振型均发生相应的改变。这里最重要的现象是扬矿泵安装位置从 ζ_1 到 ζ_6 变化时,管道的振动特性(频率和最大振幅)

出现了极值,极值位置为ζ_4。本研究所建立的扬矿管道系统其力学模型本质上是弹簧连接的带有小滑块的弹性摆,管道就是弹性摆杆,自由端摆是中间仓且质量较大,扬矿泵即为质量相对较小的滑块。弹簧刚度较大时,模型退化为接近固支弹性单摆。小滑块在弹性摆杆上运动时,当三者的质量比(摆杆弹性一定)达到一定比例范围时,这种存在极值的振动特性就会出现。

3 扬矿系统谐响应动力学分析

3.1 不同载荷激励下管道的谐响应特征

将波流联合的水平激励、波浪纵向激励、扬矿泵正常工作时产生的扭矩激励以及三者的联合激励假设为简谐激励,分析扬矿泵在不同安装位置ζ_i时,扬矿系统在单载荷激励和联合激励作用下的结构谐响应。为更清晰地得到谐响应特征,取多个监测点,将管道在第7阶和第9阶发生反弯点位置进行合理的取值,以管道100、300、500、700、900 m处作为监测点,分别记为A、B、C、D、E点,谐响应分析得到的振幅和等效应力结果见表5。

分析表明,扭矩激励下,管道的振幅和等效应力最小,其次是纵向激励,然后是水平激励,当三者同相位且联合作用会使系统的振幅和等效应力得到明显放大。

式(27)中简谐激励的大小从小到大顺序为扭矩激励、纵向激励、水平激励,上述单载荷激励和多载荷激励谐响应分析结果与式(27)中简谐激励大小顺序保持一致。扭矩激励作用下,管道在扭矩作用点附近的监测点出现等效应力极值;纵向激励和水平激励作用下,管道在顶端附近的监测点A出现等效应力极值;在联合激励作用下,管道在扭矩作用点附近的监测点出现等效应力极值。而单载荷激励和联合激励作用下,管道在自由端附近的监测点D均出现了振幅响应极值。

表5 不同载荷激励下的管道振幅和等效应力

Tab.5 Pipeline amplitude and equivalent stress under different load excitations

泵位置	激励类型	物理量	监测点谐响应				
			A	B	C	D	E
ζ_1	扭矩激励	σ/MPa	5.21	8.40	3.56	4.30	6.16
		A/mm	8.07	10.83	11.42	20.51	15.25
	纵向激励	σ/MPa	16.18	14.09	10.12	11.52	13.64
		A/mm	10.30	17.96	20.62	30.49	26.35
	水平激励	σ/MPa	27.44	24.98	22.67	21.81	20.54
		A/mm	19.31	27.67	39.87	54.61	46.08
	联合激励	σ/MPa	43.37	49.06	41.23	39.17	33.63
		A/mm	23.54	37.92	53.40	71.26	64.32
ζ_2	扭矩激励	σ/MPa	4.57	7.43	3.46	4.85	5.09
		A/mm	6.94	8.87	10.23	17.62	14.05
	纵向激励	σ/MPa	14.83	12.67	9.14	10.54	12.79
		A/mm	12.45	15.35	18.49	28.38	23.82
	水平激励	σ/MPa	25.39	23.16	20.44	19.31	18.04
		A/mm	20.76	23.54	37.56	51.32	42.81
	联合激励	σ/MPa	40.66	44.59	38.43	35.69	31.53
		A/mm	21.54	33.66	50.21	70.33	61.28
ζ_3	扭矩激励	σ/MPa	3.50	6.04	2.27	4.10	4.86
		A/mm	6.44	7.51	9.36	15.67	13.27
	纵向激励	σ/MPa	12.39	11.27	7.61	9.12	10.41
		A/mm	10.40	14.18	18.34	27.73	22.52
	水平激励	σ/MPa	24.63	21.75	19.68	17.94	15.97
		A/mm	18.43	21.86	35.20	48.83	40.15
	联合激励	σ/MPa	36.70	40.84	36.35	33.09	30.38
		A/mm	20.19	30.42	48.87	65.74	57.04

续表 5

泵位置	激励类型	物理量	监测点谐响应				
			A	*B*	*C*	*D*	*E*
ζ_4	扭矩激励	σ /MPa	2.99	5.30	2.04	3.62	4.52
		A/mm	5.31	6.17	8.67	13.91	11.43
	纵向激励	σ /MPa	10.33	10.64	6.92	8.45	9.30
		A/mm	9.83	12.22	17.10	24.21	20.23
	水平激励	σ /MPa	22.23	18.65	17.52	15.40	14.06
		A/mm	15.56	20.07	31.21	44.12	38.71
	联合激励	σ /MPa	30.47	33.75	32.26	25.74	23.85
		A/mm	20.32	30.18	36.05	60.45	54.87
ζ_5	扭矩激励	σ /MPa	3.65	6.72	2.54	4.60	4.15
		A/mm	6.06	7.39	9.08	15.49	12.31
	纵向激励	σ /MPa	13.48	11.32	8.51	9.75	11.07
		A/mm	11.87	14.67	18.25	26.32	22.98
	水平激励	σ /MPa	24.57	20.42	19.49	16.78	14.95
		A/mm	19.46	21.30	34.02	48.17	40.21
	联合激励	σ /MPa	31.54	36.23	40.30	30.05	27.44
		A/mm	23.30	34.88	42.90	67.58	60.65
ζ_6	扭矩激励	σ /MPa	4.32	6.64	3.58	4.90	5.88
		A/mm	6.41	8.26	12.37	17.45	14.32
	纵向激励	σ /MPa	14.29	12.32	10.65	11.78	12.90
		A/mm	12.64	15.75	19.06	28.43	22.65
	水平激励	σ /MPa	24.87	22.56	20.14	19.75	17.43
		A/mm	19.65	23.78	37.09	48.07	40.57
	联合激励	σ /MPa	31.81	38.69	45.78	37.04	34.59
		A/mm	26.10	36.51	54.31	71.43	62.28

3.2　多载荷联合激励下管道的谐响应分析

基于扬矿管道湿模态分析结果,采用模态叠加法研究扬矿泵分别取 6 个不同位置的管道在周期荷载作用下的动力响应。根据管道模态计算前 15 阶固有频率值,定义激励频率范围为 0.1 ~ 1.0 Hz,为较好地捕捉到响应峰值,将分析频率间隔取为 0.001 Hz。针对多载荷激励下管道的谐响应分析可得到振幅和等效应力响应与激励频率的关系。针对每个不同的扬矿泵安装位置,分别进行多载荷联合激励下的谐响应分析,在结果中找出管道的最大振幅和最大等效应力响应点,取出该点的振幅和等效应力与激励频率的响应数据,如图 9 ~ 10 所示。

不同安装位置下管道最大响应点的等效应力和振幅均出现在 0.3 Hz 附近,即与管道的第 5 阶振动频率一致,说明多载荷联合激励时管道的受迫共振发生在 0.3 Hz 附近。

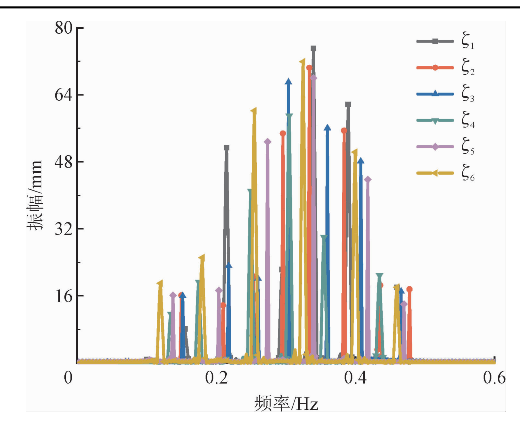


图 9　不同安装位置下管道最大响应点的振幅-频率响应

Fig. 9　Amplitude-frequency response of the maximum response point of the pipeline under different installation positions

随着扬矿泵的安装深度从 ζ_1 位置到 ζ_4 位置、ζ_4 位置到 ζ_6 位置,扬矿系统的最大振幅和最大等效应力小呈现出由小到大,再由大到小的变化规律,其中扬矿泵位置取 ζ_1 时系统的最大振幅和最大等效应力响应高于其他位置时系统的最大振幅和最大等效应力响应;其次是 ζ_2 位置,ζ_6 位置的最大振幅和最

大等效应力响应与 ζ_2 位置接近；然后是 ζ_3 位置，ζ_5 位置的最大振幅和最大等效应力响应与 ζ_3 位置接近；ζ_4 位置时，系统的最大振幅和最大等效应力响应为极小值。管道最大振幅和最大等效应力谐响应出现极值的现象与管道系统在发生自由振动时扬矿泵安装位置变化后发生振动特性出现极值的现象是一致的，多载荷联合的简谐激励并没有改变管道系统的这一固有特征。

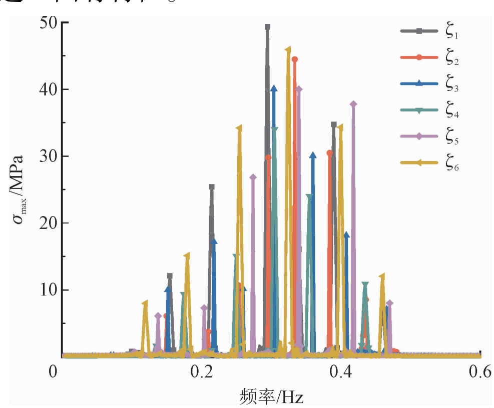


图10 不同安装位置下管道最大响应点的等效应力-频率响应

Fig. 10 Equivalent stress-frequency response of the maximum response point of the pipeline under different installation positions

扬矿泵不同安装位置对应的管道谐响应的最大振幅 A_{max} 和最大等效应力 $\boldsymbol{\sigma}_{max}$ 如图11所示。

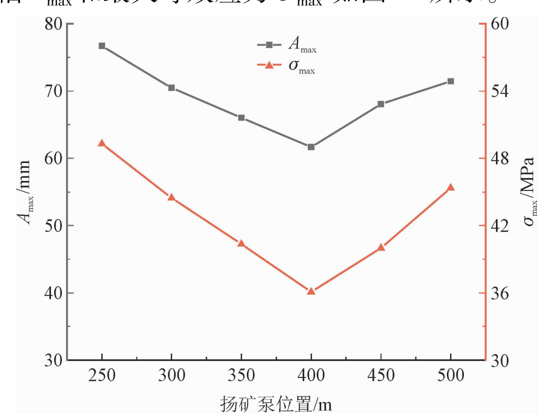


图11 扬矿泵不同安装位置对应的管道最大振幅和最大等效应力

Fig. 11 The maximum amplitude and maximum equivalent stress of the pipeline corresponding to different installation positions of the lifting pump

随着扬矿泵位置的改变，管道最大振幅和最大等效应力响应均发生相似的变化并都存在极小值，证明在给定的扬矿泵合理安装位置范围内存在最优安装位置。由于本研究采用离散模型进行研究，因此仅能在6个安装位置中找到扬矿泵次优安装位置。针对本研究所建立的扬矿子系统模型，扬矿泵次优安装位置为 ζ_4。

4 结 论

本研究主要结论如下。

1）随着扬矿泵的安装位置沿着管道下降，管道的固有频率呈现出由小到大、再大到小的变化规律，而湿模态最大振幅呈现出由大到小、再由小到大的变化规律。

2）扬矿系统在单载荷激励下的振幅和等效应力由小到大分别为：扭矩激励、波浪纵向激励、波流联合水平激励；三者联合且同相位激励时，系统谐响应显著增大。

3）多载荷联合激励作用下，随着扬矿泵高度下降，管道最大振幅、等效应力等响应呈现由大到小，再由小到大的变化规律。在给定的扬矿泵合理安装位置范围内存在振幅和等效应力的极小值，即存在最优安装位置。

4）在本研究模型基础上给出了基于谐响应分析以等效应力为判据的扬矿泵安装位置的计算方法，为扬矿系统的结构设计提供了一种定量分析方法和参考。

参考文献：

[1] 阳宁，陈光国. 深海矿产资源开采技术的现状综述[J]. 矿山机械，2010，38(10)：4-9.
YANG Ning，CHEN Guangguo. Status quo and development tendency of deep sea minerals mining technology[J]. Mining & processing equipment，2010，38(10)：4-9(in Chinese).

[2] 肖业祥，杨凌波，曹蕾，等. 海洋矿产资源分布及深海扬矿研究进展[J]. 排灌机械工程学报，2014，32(4)：319-326.
XIAO Yexiang，YANG Lingbo，CAO Lei，et al. Distribution of marine mineral resource and advances of deep-sea lifting pump technology[J]. Journal of drainage and irrigation machinery engineering，2014，32(4)：319-326(in Chinese).

[3] 肖林京，吴淼，吕淑芳. 5 000 m 深海扬矿管运动状态影响因素分析[J]. 起重运输机械，2003(8)：30-33.
XIAO Linjing，WU Miao，LÜ Shufang. Analysis of factors influencing kinematic condition of a 5000 metre long deep ocean mining pipe[J]. Hoisting and conveying machinery，2003(8)：30-33(in Chinese).

[4] WILLUMS J，BRADLEY A. MIT's deep sea mining project[C]//Proceedings of the Offshore Technology Conference. [S. l.]：[s. n.]，1974，OTC：21-38-MS.

[5] 姜峰，郑运虎，梁瑞，等. 海洋立管湿模态振动分析[J]. 西南石油大学学报(自然科学版)，2015，37(5)：159-166.

JIANG Feng, ZHENG Yunhu, LIANG Rui, et al. An analysis of the wet modal vibration of marine riser[J]. Journal of Southwest Petroleum University(science & technology edition), 2015, 37(5): 159-166(in Chinese).

[6] BATHE K J, ZHANG H. Finite element developments for general fluid flows with structural interactions[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2004, 60(1): 213-232.

[7] HEIL M. An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2004, 193(1/2): 1-23.

[8] 朱卫平,周楚健,狄勤丰. 外加横向激励对固-铰支承管道流固耦合振动的影响[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2016, 22(5): 597-605.
ZHU Weiping, ZHOU Chujian, DI Qinfeng. Effect of lateral stimuli on vibration of clamped-hinged pipeline with fluid-structure interaction[J]. Journal of Shanghai University(natural science edition), 2016, 22(5): 597-605(in Chinese).

[9] 李兵,谢里阳,郭星辉,等. 流体对薄壁圆柱管振动频率的影响[J]. 振动与冲击, 2010, 29(7): 193-195.
LI Bing, XIE Liyang, GUO Xinghui, et al. Effect of flowing fluid on vibration frequencies of a thin-walled cylindrical tube[J]. Journal of vibration and shock, 2010, 29(7): 193-195 (in Chinese).

[10] DAI H L, WANG L, QIAN Q, et al. Vibration analysis of three-dimensional pipes conveying fluid with consideration of steady combined force by transfer matrix method[J]. Applied mathematics and computation, 2012, 219(5): 2453-2464.

[11] KANG L, GE F, WU X D, et al. Effects of tension on vortex-induced vibration (VIV) responses of a long tensioned cylinder in uniform flows[J]. Acta mechanica Sinica, 2017, 33(1): 1-9.

[12] HONG Y P, KOTERAYAMA W. A numerical simulation scheme for dynamics of flexible riser and its validation by forced oscillation experiments[J]. International journal of offshore and polar engineering, 2004, 14(2): 110-117.

[13] 周知进,卢浩,王钊,等. 垂直提升管道输送过程中的流固耦合效应分析[J]. 中国海洋大学学报, 2013, 43(1): 87-92.
ZHOU Zhijin, LU Hao, WANG Zhao, et al. Characteristics analysis on considering fluid-solid coupling effects for vertical lifting pipe[J]. Ocean University of China, 2013, 43(1): 87-92(in Chinese).

[14] 周知进,陈雄,康红军,等. 海流冲击对深海采矿装备液压管道流固耦合振动的影响[J]. 噪声与振动控制, 2015, 35(2): 7-10.
ZHOU Zhijin, CHEN Xiong, KANG Hongjun, et al. Influence of ocean current impact on fluid-structure coupled vibration of deep-sea mining equipment's hydraulic pipelines[J]. Noise and vibration control, 2015, 35(2): 7-10(in Chinese).

[15] 周知进,杨智,王钊,等. 外部液动力作用下管道输送流固耦合应力分析[J]. 工程力学, 2013, 30(12): 242-247.
ZHOU Zhijin, YANG Zhi, WANG Zhao, et al. Stress analysis on fluid-solid coupling effects for vertical lifting pipe[J]. Engineering mechanics, 2013, 30(12): 242-247(in Chinese).

[16] 周知进,阳宁,王钊,等. 外部流体作用下管道输送流固耦合效应偏移分析[J]. 振动与冲击, 2013, 32(13): 142-146.
ZHOU Zhijin, YANG Ning, WANG Zhao, et al. Pipe's offset analysis for a pipeline transporting under action of external fluid considering fluid-solid coupled effects[J]. Journal of vibration and shock, 2013, 32(13): 142-146(in Chinese).

[17] RAHMATI M T, NOROUZI S, BAHAI H, et al. Experimental and numerical study of structural behavior of a flexible riser model[J]. Applied ocean research, 2017, 67: 162-168.

[18] 唐达生,李钟,周知进,等. 锰结核泵工作对扬矿管道振动影响的研究[J]. 振动与冲击, 2015, 34(23): 149-152.
TANG Dasheng, LI Zhong, ZHOU Zhijin, et al. Effects of manganese nodules pump operation on lifting pipe vibration[J]. Journal of vibration and shock, 2015, 34(23): 149-152 (in Chinese).

[19] 肖林京,刘强,范芳超. 深海采矿扬矿管横向非线性振动响应分析[J]. 科学技术与工程, 2020, 20(26): 10696-10701.
XIAO Linjing, LIU Qiang, FAN Fangchao. Analysis of transverse nonlinear vibration response of hoisting pipe in deep sea mining[J]. Science technology and engineering, 2020, 20(26): 10696-10701(in Chinese).

[20] 冯雅丽,李浩然,张云仙. 5 000 m 扬矿管纵向振动研究[J]. 有色金属, 1999, 51(4): 13-18.
FENG Yali, LI Haoran, ZHANG Yunxian. A study on axial oscillation of 5 000 m lifting pipe[J]. Nonferrous metals, 1999, 51(4): 13-18(in Chinese).

[21] 赵燕娟,张玉良. 离心泵转速剧烈波动时的瞬时响应特性研究[J]. 热能动力工程, 2016, 31(5): 106-112.
ZHAO Yanjuan, ZHANG Yuliang. Study of the transient response characteristics of a centrifugal pump undergoing a drastic fluctuation in the rotating speed[J]. Journal of engineering for thermal energy and power, 2016, 31(5): 106-112(in Chinese).

[22] 肖林京,张文明,方湄. 深海采矿扬矿管非线性动态特性研究[J]. 煤炭学报, 2002, 27(4): 417-421.
XIAO Linjing, ZHANG Wenming, FANG Mei. Study of nonlinear dynamic characteristics on deep ocean lifting pipe[J]. Journal of China Coal Society, 2002, 27(4): 417-421(in Chinese).

[23] 赵珂. 深海采矿长距离输送管道动力学特性研究[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2020.

[24] 赵江,俞建峰,楼琦. 基于流固耦合的 T 型管振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(22): 117-123.
ZHAO Jiang, YU Jianfeng, LOU Qi. Modal analysis of T-shaped pipes based on a fluid-solid interaction model[J]. Journal of vibration and shock, 2019, 38(22): 117-123(in Chinese).

(编辑　吕茵)